

Citát úvodem:

„Po takřka 2 500 let trvání západní civilizace, jejíž počátek spadá do období starověkého Řecka, se na matematiku a hudbu pohlíželo jako na dvě strany téže mince. A lidé věřili, že obě poskytují náhled na uspořádání vesmíru. Mezi nimi je však jeden velmi zřetelný rozdíl. Pokud hudební part zahraje kvalifikovaný odborník, může jej ocenit i laik. Poslech a prožívání hudby nevyžaduje žádný hudební trénink. S matematikou je to poněkud obtížnější. Řečí jejích symbolů se musíme naučit. Matematické struktury a modely se sice stejně jako hudba zrcadlí v lidské mysli, ale u člověka se nevyvinula žádná obdoba *matematických uší*. Matematiku můžeme vnímat jen *očíma své mysli*. V hudbě by nastala podobná situace, kdybychom ztratili sluch. Sluchově postižená žena nebo muž by snad mohli vnímat a prožívat hudbu pouze při čtení notového zápisu. Vysoká úroveň abstrakce v matematice a z toho plynoucí nutnost používat symbolické zápisy bohužel znamená, že mnohé oblasti zůstanou laikům navždy nedostupné. Dokonce i ty přístupnější části, popsané v populárně naučných knihách skrývají před laikem většinu své vnitřní krásy. **Proto by se měl každý, kdo je obdařen schopností vnímat a ocenit vnitřní krásu matematiky, snažit alespoň něco z její čistoty a elegance předat ostatním.**

(Citát z knihy Keith Devlin: Jazyk matematiky)

Těší mě, že díky mému **doučování** řada lidí, svojí mysli dříve slepá a hluchá k vnímání krásy matematiky, začala slyšet a vidět.

Matematika začíná být zajímavá až po zvládnutí nezajímavé školní látky.

Výuka matematiky

Výuka matematiky má své zvláštnosti oproti výuce jiných předmětů. Právě proto způsobuje problémy, mnohdy však zcela zbytečně. Pro úspěšné studium bývá důležité především vědět, **jak se matematiku učit** a poté zvládnutí látky již není takový problém. Je málo studentů, kteří nezvládají látku z důvodu nedostatku nadání pro výuku. Většinou žáci neznají, nepochopí nebo nechtějí dodržovat specifické zásady a pravidla, která jsou pro výuku potřebná. Následující texty ukazují různé postřehy, které jsem získal během téměř třicetileté praxe s individuální výukou.

Zvláštnosti výuky matematiky

Ve většině předmětů na našich školách se ověřuje znalost žáka tak, že naučenou látku dokáže přeříkat nebo vlastními slovy promluvit o tom, co se naučil. V matematice je k úspěšnému studiu potřeba především **látce porozumět**, výhodou bývá, zvládne-li žák i **o daném tématu mluvit**. Znalosti se především ověřují zvládnutím **spočítat příklady**. Úspěšně řešit příklady jde tehdy, má-li student **v počítání dostatečnou praxi**.

Výhody individuální výuky

Práce učitele ve škole je určena osnovami a učebním plánem. Na každou hodinu má učitel připraveno co je potřeba stihnout. Ověřit znalosti žáků, vysvětlit novou látku, ukázat postupy řešení vzorových příkladů, vést žáky k samostatné práci. Zvládnout všechny tyto úkoly tak, aby všichni žáci ve třídě se během omezeného času úplně a dokonale celou látku naučili, není v silách a možnostech žádného učitele. I proto, že většinu žáků probíraná látka zpravidla nebaví a raději by se v kolektivu svých vrstevníků zabývali nějakou jinou, zajímavější činností. K ovládnutí látky a zejména k získání potřebné praxe při řešení příkladů se předpokládá u většiny žáků ještě jejich vlastní práce po vyučování. K tomu slouží jednak zadávání domácích úloh a samostudium teorie a získávání praxe v počítání příkladů. Mnoho žáků však samostatného učení není schopno nebo je samostudium značně neefektivní. Při počítání příkladů se zastaví u nějakého problému přes který se nedokáží sami dostat. Návod, jak postupovat, sami z učebnice nezjistí, neboť jejich znalost porozumět matematickému jazyku je malá a proto textu v knize nerozumí.

Navíc žákům chybí znalosti ze starší látky a jejich dohledání je obtížné nebo zcela nad síly studentů. Při samostatném počítání příkladů mnohdy i drobná neznalost nebo chybička úplně znemožní, aby žák samostatně úlohu dokončil.

Samostudium zpravidla bývá těžkopádné, neúčinné, časově náročné. Za dlouhou dobu žák pochopí látku málo, spočte příkladů málo, nezná příčiny, proč se nedokáže látku naučit. Často tyto potíže studenty od učení odradí. Žák vidí, že se sám nic nenaučí a tak se o to ani nepokouší. Neznalosti se prohlubují, problémy s matematikou se zvětšují.

Sám jsem se v době mého studia na škole sice dokázal velkou pílí, houževnatou pracovitostí a důsledným systematickým postupem samostatně látku naučit, ale dnes vidím, o co snadnější to mají moji žáci, kterým při jejich práci odborně pomáhám.

Výhody doučování

Přizpůsobení schopnostem žáka

Hlavní rozdíl v kvalitě výuky při učení jednoho nebo více žáků spočívá v možnosti přizpůsobení se potřebám vyučovaného žáka. Při výuce skupiny je výuka neosobní a zmenšuje se možnost zpětné vazby mezi žákem a učitelem. Učitel ve škole postupuje podle časového plánu bez ohledu na to, zda žáci stihli látku porozumět a už vůbec nemá čas se o tom všem u jednotlivců během výkladu přesvědčovat. Navíc někteří žáci se snaží předstírat, že látku rozumí, aby při zkoušení získali lepší známku. Často jim to vyjde, protože i na přezkoušení není ve škole tolik času, aby učitel spolehlivě odhadl, kdo zná a kdo to dovede pouze dokonale předstírat. I když matematika, na rozdíl od ostatních předmětů, je natolik dokonalá, že možnost předstírání znalostí oproti jiným předmětům je velmi obtížné.

Při individuální výuce kontroluji znalosti žáka přizpůsobuji tomu postup. Podle příčin neznalostí a podle schopností žáka vyberu metodu výuky, která se mi u obdobných případů v minulosti nejvíce osvědčila.

Často se stává, že žáci chtějí chodit na doučování ve dvojici. Zkušenost ukazuje, že intenzita výuky se podstatně sníží a proto vyučování ve dvojici nedoporučuji. Při sjednávání takové zakázky vysvětlím zákazníkům své důvody:

1. Doučování často skončí tím, že se dva žáci a učitel hůře shodnou na společném termínu než jen učitel a žák. Nabízím ovšem pak možnost učit jen jednoho žáka.
2. Znalosti dvou lidí, jejich schopnost se učit, rychlost se učit, nikdy nejsou stejné. A tak při hodině schopnějšího zdržuje žák zaostalejší, zatímco zaostalejší nestíhá všemu porozumět a hodina pro něj není přínosem.

Při učení matematiky hodně platí zásada, že získat znalost lze jen velkou námahou. Přirozená obrana organismu proti námaze často mnoha lidem způsobí ve škole velké problémy s matematikou.

Když jsem se sám učil, přečetl jsem řadu učebnic a spočítal mnoho příkladů. Mnohdy jsem strávil spoustu času a námahy při luštění významu textu v učebnici. Hledal jsem v jiných knížkách vysvětlení termínů, kterým jsem nerozuměl, znovu jsem si opakoval látku, která předcházela. Při počítání příkladů jsem mnohdy narazil na něco, co jsem neuměl překonat. Pak přišla zdoluhavá cesta procvičování mnoha lehčích příkladů do té doby než jsem u obtížných příkladů byl schopen sám najít řešení.

Bohužel jsem často ve sbírkách a učebnicích narazil na chybu ve výsledku a já se zastavil v dalším učení dopředu a prohluboval jsem si předchozí látku do té míry, než jsem byl schopen dokázat, že v učebnici je ve výsledku chyba. Je pravda, že moje houževnatost, píle a pevná vůle přispěla k rozšíření mých znalostí a naučila mne dokazováním chyb v učebnici, schopnosti v životě překonávat pohodlí a nevyhýbat se a zvládnout i obtížné úkoly. Často ale pochybuji o tom, zda jsem svých sil využíval efektivně. Dnes svým žákům často závidím, jak s mojí pomocí zvládnou látku o mnoho snadněji a rychleji než já před lety.

Často mívám pocit, že velké množství žáků má velké nadání pro učení matematiky, ale jejich špatné výsledky jsou jen důsledkem nedodržování některých zásad, např.:

- postupovat od jednoduššího ke složitějšímu,
- nedostatečné množství spočtených příkladů,
- neznalost předcházející látky,
- pilná práce v matematice od první třídy.

Při bližším kontaktu se žáky poznávám, že těch, kteří se obtížně učí matematiku je málo. Mnoho z nich by se učilo snadno a rychle, kdyby si v minulosti nezvykli na nesprávné způsoby výuky mezi něž patří:

1. učení postupů nazpaměť místo učení pravidel
2. vymyšlení a hledání vlastních pravidel a postupů, které platí jen někdy

Vzhledem k tomu, že tyto nesprávné postupy často žákům vycházejí, bývá pro mne velmi obtížné je přesvědčit o omylu. Přeucit nějaký špatný návyk je téměř nemožné. Žák, který má nečitelné písmo proto, že si v první třídě zvykl špatně držet tužku (způsob „jako prase kost“), odmítne na střední škole se znovu učit čitelně psát.

Ad 1. Znal jsem studentku, která znala příklady, které může dostat u maturity. Naučila se je nazpaměť natolik dobře, že mohla psát příklad od prostředku nebo i pozpátku směrem od výsledku k počátku. Množství naučené látky nazpaměť nesrovnatelně mnohokrát převyšovalo množství pouček a vzorců v středoškolské matematice. Pokud by bylo v příkladu

jiné číselné zadání, příklad neuměla studentka vyřešit. Je nedostatkem učitele, že dopustí, aby tato studentka měla lepší výsledky než jiní, kteří matematice rozumí.

Ad 2. S tímto jevem se setkávám velmi často a prakticky u každé látky. Často bývají v tomto nedostatku žáci podporováni i ze strany některých učitelů ve škole, kteří učí postup a ne pravidla postupu. Při výkladu postupu je nutné ve větách používat správné termíny, kterým žák předtím porozuměl. Slova v poučkách se nesmí nahrazovat zájmeny a příslovci.

- Přehnaný příklad: **Nesprávná formulace:** To se to tím tak, že se to tím to a to se to.
Správně: Zlomek se násobí celým číslem tak, že se násobí celým číslem čítemel zlomku a jmenovatel se ponechá beze změny.
- Uvedu několik dalších příkladů:
 - a) žák si všimne, že v několika příkladech se začíná při konstrukci trojúhelníku stranou c. Udělá si z toho pravidlo, které bezhlavě aplikuje u jiných příkladech.
 - b) Ve slovní úloze si žák pamatuje, že se čísla spolu násobí. Dostane-li jinou úlohu, kde se čísla sčítají, i když tato úloha bude velmi jednoduchá, bude žák čísla násobit.

Někteří žáci jsou ve vyhledávání nesprávných zákonitostí, vztahů a postupů tak vynalézaví, že jejich schopnosti zaslouží obdiv. Škoda, že své dovednosti nepoužívají správným způsobem, který by jim zaručil vynikající výsledky ve znalosti matematiky.

Výklad a samostatná práce

Pro naučení prakticky počítat příklady je výklad teorie nebo předvedení výpočtu vzorových příkladů pouze úvodem vlastní výuky. Hlavním úkolem výuky musí být docílení samostatné práce studenta. Žák počítá od jednodušších příkladů ke složitějším a přitom se postupuje tak rychle, aby se dostatečně ověřilo, že příklady je schopen samostatně vyřešit. Za ideální (ovšem časově náročný) postup doporučuji po krátkém výkladu (popřípadě předvedení, jak se příklad počítá) hned přistoupit k přezkoušení, jak žák úlohu sám zvládá. Vypočte-li příklad sám bez mé pomoci a bezchybně, může se přikročit k dalšímu obtížnějšímu příkladu. Pokud při počítání bylo nutno studentovi pomáhat drobnými radami, je možné jít na další příklad pouze s vědomím toho, že látka nebyla naučena důsledně. Je ovšem potřeba upozornit, že žák na sebe bere odpovědnost za možné potíže v budoucnu, kdy se nedůsledností nastřádá neznalostí více.

Za schopnost samostatně spočítat příklad se považuje práce bez jakéhokoliv zásahu učitele. Občas se setkám s extrémním nešvarem, že někteří žáci mají tendenci si nechat potvrdit správnost každé napsané číslice. Po napsání každé cifry, symbolu nebo slova vzhlednou na mne a čekají, zda kývnu. V takových případech tlačím žáky k samostatnosti a upozorňuji, že pokud mám všechno co napíší odkývat, mohla by moji práci učitele zastat hračka psa, která byla v módě před více než 30 lety. Tento pes měl kývací hlavu spojenou se závažím, umísťoval se za zadní okno automobilů, kde vlivem setrvačnosti pomalu kýval hlavou.

V případě, že žák potřebuje více pomáhat při řešení úlohy, doporučuji za ideální tutěž úlohu spočítat několikrát za sebou až ji student zvládá samostatně. Je potřeba psát na jinou stránku nebo úlohu zakrýt, aby nebylo možné opisovat a také někdy je potřeba opakovat úlohu až po chvíli, aby se student neučil nazpaměť postup, ale postupoval podle logické úvahy, podle pouček a zákonitostí. Tatáž metoda výuky se mi osvědčila i tehdy, když žák

počítá příliš pomalu nebo zdlouhavým postupem. Je potřeba vytrénovat jak bystrost a rychlost při počítání, tak „optimalizovat postup“, tedy řešit úlohu co nejjednodušší a nejkratší cestou. „Optimalizace“ řešení úlohy tedy zpravidla spočívá v tom, aby například úprava rovnice nebo výrazu obsahovala co nejméně kroků, využívala elegantní postup a podobně. Ne vždy však přílišné zkracování počtu kroků je namístě, musí se volit optimální cesta, kdy je výhodnější a rychlejší více přemýšlet a méně psát či naopak. Podle času, který student potřebuje k výpočtu příkladu a podle počtu chyb se pak snažím doporučit konkrétnímu studentu, jak velká „optimalizace postupu“ je pro něj výhodná. Setkávám se se dvěma extrémů, které bývají zdrojem školních neúspěchů:

1) **Žáci líní myslet** píšou zbytečně dlouhé zápisy a nezlepšují se jejich znalosti elegantního a rychlého výpočtu. Při řešení složitých příkladů se příliš zabývají elementárními dovednostmi, které měli mít již několik let zvládnuté. (například vysokoškolák potřebuje příliš mnoho kroků k tomu, aby sečetl dva zlomky)

2) **Žáci líní psát** se zase snaží všechno vyřešit z paměti. Své schopnosti přeceňují a dělají chyby. Navíc v zápisu bez důležitých údajů se vyznají jen oni sami a pouze několik vteřin po tom, co zápis zapsali. Pokud tomu nevěří, musím je o tom při výuce přesvědčit – po určité době po nich chci, aby rozluštili obsah vlastního textu. V jejich zápisu nemůže nikdo zkontrolovat postup ani odhalit příčinu chyby; někteří lenoši ani nenapiší výsledek nebo jej nevyznačí podtržením.

Po dokonalém zvládnutí počítání příkladu se může přistoupit na obtížnější. Pokud není naděje, že ke zvládnutí dojde, je zapotřebí se vracet zpět k jednodušším příkladům, někdy probíraných o mnoho tříd zpět. (Může se stát, že student čtvrtého ročníku střední školy se potřebuje naučit látku téhož ročníku, ale základní školy.)

V praxi ovšem nelze postupovat vždy ideálním postupem. Ten je vhodný pro úspěšné studenty (např. když se doučují proto, aby jim známka 2 z matematiky nekazila vysvědčení nebo když chtějí pokračovat ve studiu na další škole). Je potřeba vycházet z toho, kolik času je student ochoten výuce věnovat a výuku zjednodušit tak, aby se žák naučil alespoň něco. Pak se ustupuje od dovedení žáka ke zcela samostatné práci, netrénuje se opakování stejných příkladů, nevrací se ke staré látce. Žák potřebuje více zásahů ze strany učitele při výpočtu. Kvalita výuky klesá bohužel často pod hranici dostatečnosti.

Přesto je potřeba se snažit překonávat pohodlí studentů a přesvědčovat je k samostatné práci. Za nejhorší postup považuji případ, kdy student po mně žádá, abych počítal já a on se na mne díval. Zažil jsem dokonce extrémní případ, kdy se chodila dívat na to, jak počítám, maminka žáka. Její syn byl nejen líný sám počítat, ale ani se mu nechtělo dojit se podívat, jak počítám já. Jeho maminka se zoufale snažila udělat pro svého propadajícího lenocha alespoň něco. Myslet si, že se student díváním na počítajícího učitele něco naučí, se dá přirovnat k případu, zda je možné se naučit dokonale řídit auto pouhým sledováním řidiče, bez vlastní praxe řízení vozu. Dá se pochopit k čemu slouží 3 pedály a 1 volant, ale na zvládnutí průjezdu velkoměstem po náledí to jistě nestačí.

Pokud žák výslovně žádá, abych počítal já a on mě pouze sledoval, upozorním ho na jeho omyl, zda si myslí, že se tak něco naučí. Pokud si žák nedá říct, řídím se heslem „Náš zákazník, náš pán“ a ukázkou, jak by mohl jednou umět počítat, kdyby dbal mých rad, předvedu. Nebezpečnost takové výuky však ještě zvyšuje to, že žák, který mne při výpočtu sleduje, nabývá dojmu, že látka, kterou má znát, je velmi lehká

Doučování probíhají některou z těchto metod:

1. Žák je schopen samostatného studia látky z učebnice, má dost pílě samostatně počítat příklady. Pochopil, že se musí postupovat od jednoduššího ke složitějšímu a vše řádně

- procvičit. Na doučování dochází pouze pro vysvětlení a upřesnění detailů v teorii a nechat si zkontrolovat postup v doma řešených příkladech, nechat si poradit o metodě a postupu učení.
2. Žák si nechá na doučování vysvětlit teorii, na doučování spočte pod mým dohledem několik vzorových příkladů, dostane příklady na domácí procvičení.
 3. Žák počítá samostatně na doučovací hodině. Vyžaduje více zásahů a vysvětlování postupu při počítání.
 4. Snažím se, aby žák sám při počítání přemýšlel, ale více méně diktuji jen to, co má žák napsat. Když přestanu diktovat a snažím se nápovědou přimět žáka k nalezení postupu, žák nepřemýšlí, ale čeká až nadiktuji, co má napsat.
 5. Žák sleduje, jak počítám já. Upozorňuji na nízký efekt výuky, ale vyhovuji přání zákazníka. Přesto se snažím postup počítání vysvětlovat.
 6. Místo žáka přijde na doučování jeho maminka a dívá se, jak počítám příklady, které by se měl její syn naučit. (Naštěstí dosud pouze asi 0,07 % žáků).

Některé příčiny obtíží se studiem matematiky.

Úprava při psaní

Jedním z častých důvodů, které způsobují zbytečné problémy, bývá nedostatečná úprava, ať už ve školních sešitech nebo při samostatném počítání.

Při počítání příkladu by každý měl pamatovat na to, že jeho text má být napsán tak, aby jej mohl kdokoliv pohodlně přečíst, aby byl z textu patrný postup a šlo v něm najít příčiny chyb. Často první člověk, který má problémy text přečíst a najít v něm chybu, je ten, kdo text psal. Žáci si často nesprávně myslí, že když ví, co psali, že vždy to sami po sobě přečtou. Pokud domluvě nevěří, je potřeba, aby se sami přesvědčili, že nečitelně napsaný text jednoznačně a správně nerozluští. Slovní text často přečteme jen proto, že si nečitelná místa domýšlíme podle významu a smyslu celku. To však nejde v matematice, kde každá číslice a písmeno má svůj přesný význam a nesmí se zaměnit jiným. Doporučuji například přeškrtnout písmeno **Z**, aby ne nepletlo s číslicí **2**. V analytické geometrii upozorňuji, že normálový vektor **n** se v ručně psaném textu plete s písmenem **u** určeným pro vektor směrový. Je důležité věnovat pozornost a pečlivost při zápisu těchto písmen, nebo raději směrové vektory označovat písmenem **s** i když to tak v učebnicích není. V tištěném textu bývá často zamlčené znaménko součinu nahrazeno mezerou. V ručně psaném zápisu je mezera špatně patrná. V případě součinu funkce s číslem nebo písmenem je vhodné činitele součinu seřadit tak, aby na konci byl jen argument funkce: Tedy místo **sina x** psát raději **x sina** případně **(sina)**

x. U součinu s odmocninami je vhodné součin řadit v pořadí

1) čísla

2) písmena

3) odmocnina

tj. $2x\sqrt{5a}$. Zabrání se tím nejasnostem, kde přesně končí čára odmocnítka.

$$\sqrt{2x} \quad \sqrt{2x} \quad \sqrt{2x} \quad \sqrt{2x} \quad \sqrt{2} x \quad ?$$

Při počítání příkladů by měl žák postupovat tak, aby úhledný a přehledný zápis usnadňoval řešení příkladu. Námaha věnovaná pečlivému zápisu usnadní přemýšlení nad příkladem. Řešení příkladu z nové látky je často na hranici schopností žáka. Přehledný zápis ulehčí obtížnou orientaci v textu a v problému. Žáka nezatěžuje to, že se v textu nevyzná a o to více se může věnovat vlastnímu počítání. Přehledně a čitelně prováděný výpočet je tedy stejně důležitý pro správný výsledek jako znalost veškeré dříve probrané látky a praxe v počítání. Řada žáků se nesprávně spoléhá na to, že jejich bystrý rozum se vyzná v nečitelném a nepřehledném zápise. Podle hesla: „Pořádek je pro blbce, inteligent ovládá chaos.“ Ale i tito žáci jsou ochuzeni svojí nepečlivostí o lepší výsledky dosažené s menší námahou.

Zpravidla je rychlejší a pohodlnější více psát než se snažit zvládnout vše vyřešit z paměti, pokud nemáme v počítání velkou praxi. Lenost něco napsat nutí často žáky k tomu, že se marně snaží provádět z paměti mnoho operací najednou – víc než jsou schopni. Pracují pak pomalu a chybně.

Při psaní na papír je potřeba postupovat zleva doprava a ze shora dolů. Je neuvěřitelné jak mnoho žáků má s touto samozřejmostí potíže. Zlovyk psát na papír, kde se mi právě chce a je zrovna místo (nebo někdy ani místo není) zcela znemožňuje tento text přečíst, natož vysledovat pořadí v jakém byl zápis proveden.

Závěrem uvedu jeden příklad žáka, který měl zvlášť velké potíže s úpravou. Učil jsem studenta – Araba, který se asi v 18 letech přistěhoval do Čech a tady začal studovat střední školu - obchodní akademii. Měl potíže odnaučit se směr psaní zprava doleva. Zpočátku si myslel, že to v matematice není důležité, jakým směrem například zapisuje čísla a umínutě trval na svém. Nadiktoval jsem mu česky 175 843 321, aby číslo zapsal odzadu. Než jsem číslo řekl, on čekal na jeho konec, aby jej začal psát odzadu a mezitím zapomněl začátek. Často uprostřed řádku náhle změnil směr psaní a začal psát pozpátku a „narazil“ do již napsaného. Horší bylo přesvědčit jej, že není správné psát chaoticky na různá místa na stránce, že je nutno postupovat odshora dolů. Zeptal jsem se, zda u nich se také píše odshora dolů. Odpověděl mi: „Nejsem Číňan.“

Vývoj v přístupu žáků ke vzdělání

Učím dlouho a žáky různých typů škol. Během posledních 10 let pozoruji zvyšující se zájem o moji práci ze strany studentů a také se mění důvody, proč studenti doučování navštěvují. Pozorováním docházím k závěru, že socialistická společnost se snažila vytvořit nejen společnost lidí s málo odlišnými příjmy a životní úrovní, ale podobně se podařilo u společnosti srovnat rozdíly ve vzdělání. Vysoké vzdělání a znalosti nemělo odpovídající uplatnění a ocenění, naopak na základních školách byla obrovská motivace žáků dostat se na

střední školu, a tím se vyhnout podřadné namáhavé práci po celý život. Důsledek toho bylo, že téměř všichni dělníci a učni například znali a používali dobře pravopis a na druhou stranu vysokoškoláci znali cizí jazyky zpravidla jen povrchně. V současné době „otvírání nůžek“ ve vytváření sociálních rozdílů platí i pro vytváření rozdílů ve vzdělanosti společnosti. Dnes je tomu právě naopak. Podobné změny v rozdílech znalostí pozorují i při doučování matematiky. Přibývá lidí, kteří o vzdělání nejeví zájem – ví, nebo si myslí, že v životě jej k dosažení zisků nebudou potřebovat. Druhá část se snaží všemi silami získat co nejvyšší úroveň svého vzdělání, vyniknout v silném konkurenčním prostředí ve vzdělání za každou cenu. Již malé děti na základních školách dnes cílevědomě a dobrovolně usilují o co největší výkon ve škole, který jim jednou umožní kariéru.

Zdá se, že školy se postupně přizpůsobují neustále přibývajícím částem žáků, kteří nejeví o vzdělání zájem. Viz článek z Reflexu č.41 /2004:

Co je to vlastně biflování ?

Předem přijměte, pane Feřteku, mé ujištění, že nejsem a nikdy jsem nebyl učitelem. Naopak jsem spousty let strávil ve školních lavicích jako žák a student.

Je zarážející, že studenti gymnázií a celá společnost se v době počítačů brání výuce matematiky, která je pro vývoj počítačové techniky a pro rozvoj logického myšlení základem.

Jiří Ryš, Ostrava

Pokud jde o autorem (T. Feřtek) kritizované verbálně-pamětní učení, řada dětí mu dává přednost (já ne). Žáky lze rozdělit na tři skupiny. První preferuje jazyky a pamětní učení, obvykle se vyhýbá matematice a fyzice. Druhá má technické, přírodovědné a matematické sklony; pravopisem se moc netrápí. Třetí nechce dělat nic, nic je nebaví.

Vzhledem k tomu, že žurnalisté neustále bojují proti pamětnímu učení i proti matematice (první a druhá skupina žáků), zbývá jediný závěr – zastupují zájmy skupiny třetí. Bylo by načase říci to nahlas. Vyjádření typu „učitelé jsou pitomci“ třetí skupina jistě ocení.

Petr Špína, učitel na ZŠ a SŠ, Hradec Králové

Během asi 27 let, kdy doučuji žáky matematiku se výrazně mění složení žáků, kteří mé hodiny navštěvují. Dříve převládali žáci, kteří patřili ve škole k nejhorším. Buď neměli na matematiku nadání (ale pozorují, že těchto lidí zase tolik není) nebo většinou nedodrželi nutnost učit se matematiku systematicky a pravidelně podle nutných zásad. Postupně těchto žáků ubývá a výrazně přibývají ti, kterým výuka ve škole nestačí k tomu, aby dosahovali nadprůměrných výsledků.

Moje práce se tak stává příjemnou a zábavnou, protože učím většinou lidi, kteří mají zájem a chtějí se něco naučit. Děti, které se sami nechtějí učit a posílají je na doučování rodiče, ubývá. Kdo se nechce učit, stejně ho nikdo nedonutí.

Jazyk výuky

Ve školách se v matematice zpravidla po žácích žádá jen znalost počítání příkladů a podceňuje se, aby žáci znali definice, věty a poučky a uměli je slovně formulovat.

Je pravda, že k počítání to není nutné. Správné a přesné vyslovení poučky však podporuje i schopnost řešit příklady. V případě, že žák při počítání neví jak dále postupovat, stačí si vzpomenout na zformulovaný a naučený postup nebo pravidlo. Je-li věta jen naučená

nazpaměť, aniž by žák rozuměl jejímu obsahu, nemá význam. Za optimální považuji postup, kdy se žák

- 1) Nejprve se žák naučí větu nazpaměť, aby se při porozumění nemusel zatěžovat slovním vyjádřením
- 2) porozumí obsahu věty – přemýšlí nad smyslem toho, co naučeného přeřikává
- 3) postupně zapomíná nazpaměť naučený text a slovy se snaží sám vyjádřit myšlenku, kterou pochopil v bodě 2)

Výuka matematiky je podobná výuce cizího jazyka. Pojmům se přiřazují slova. V cizím jazyce to jsou zpravidla pojmy konkrétní, v matematice pojmy abstraktní. Pojmy se definují podle dříve naučených termínů. Pomocí nově naučených „slovíček“ se vyjádří nové poznatky, nové věty. Podobně jako v cizím jazyce si žák získává pasivní znalost (rozumět cizímu textu) a aktivní znalost (sám hovořit v cizím jazyce) tak i v matematice je nutná pasivní znalost matematického jazyka- rozumět učiteli o čem mluví a aktivní schopnost o vyučované látce samostatně hovořit.

Pasivní znalost cizího jazyka i jazyka matematiky je vždy větší než aktivní znalost. Porozumíme více slovům, termínům a větám, než jsme sami schopni správně zformulovat. Učení aktivní znalosti současně ale rozšiřuje i znalost pasivní a naopak. Proto je potřeba aktivní znalost matematického jazyka natolik cvičit, aby žák rozuměl tomu, co učitel vykládá a také aby byl žák schopen přesně vystihnout čemu nerozumí a zeptat se natolik přesně, aby učitel pochopil na co se žák ptá. Pro vyjadřování myšlenek v matematice je mimořádně důležitá přesnost formulace a použití správných termínů.

Často se setkávám s žáky, jejichž znalosti z matematiky končí mnoho tříd zpátky. Například jsem se setkal se žákem, který se v deváté třídě hlásil na střední školu s maturitou s technickým zaměřením a neuměl přečíst čísla větší než 1 000. Přesto to byl jinak bystrý a učenlivý chlapec. Před lety se však zanedbalo učení jazyka, kterým se matematika vysvětluje. Žák přestal rozumět tomu, co se mu ve škole říkalo a protože látka pokračovala dále ke složitějšímu, již se nic dalšího nemohl naučit, protože vykládanému nerozuměl. Většinu tříd na základní škole seděl v hodinách matematiky zbytečně.

Vystihnutí podstaty problému žáka

Za hlavní přednost soukromé individuální výuky považuji možnost co nejvíce přizpůsobit výuku podle schopností a potřeb žáka. Z toho důvodu nerad učím dva žáky najednou, protože vždy se výuka přizpůsobí jednomu a druhý je škodný i když mohu střídat, kterému žákovi se více přizpůsobím. Během 27 let jsem učil individuálně více než 2 000 žáků a tak mě zpravidla nic nepřekvapí a vždy si vzpomenu, že s podobným problémem v učení už jsem se někdy předtím setkal. Učil jsem žáky základních, středních i vysokých škol různého zaměření, několik žáků navštěvovalo i zvláštní školu. Učil jsem hodně žáků večerního i dálkového studia, mnoho z nich bylo řadu let ze školy venku a matematiku nepoužívalo. Podobně jsem učil i několik cizinců: Rusy, Araba, Ukrajince, Vietnamce, Slováky nebo lidi, kteří se z ciziny vrátili a byli tam zvyklí na jiný styl výuky, značení, učili se trochu jinou látku. Setkal jsem se se žáky bojácnými i arogantními suverény, pomalu i rychle myslícími, lidmi slušnými i méně slušnými. S každým bylo nutno jednat jinak.

Žákům zpravidla pomůže vysvětlit to, co se nedozví ve škole, kde učitel má na starosti více žáků:

- 1) Volba správného přístupu k žákovi

- 2) Vysvětlení staré látky, jejíž výuka byla zanedbána
- 3) Vedení ke správnému postupu výuky od jednoduššího ke složitějšímu
- 4) Vyžadování po žákovi, aby porozuměl podstatě vyučované látky
- 5) Vedení žáka k vlastnímu úsudku a k samostatné práci
- 6) Nácvik dodržování předepsaných nebo osvědčených návyků - úpravy, postupu, pravidel
- 7) Dodržení zásad úpravy a čitelnosti

Sebevědomí

Jedním z příčin školních neúspěchů bývá nepřiměřené sebevědomí žáků. Nízké i vysoké. Problémem jsou oba extrémy.

S žákem, který se bojí, že danou látku nezvládne, nebo se bojí neúspěchu, se musí velmi citlivě zacházet. Postupovat pomalu, nechvátat, na každý úspěch upozornit a chválit. I když někdy výsledky jsou objektivně bídné, pro daného žáka je každý sebemenší úspěch úspěchem a musíme být za něj rádi. Často vlídné zacházení, chválení a povzbuzování vede k tomu, že žák, který se dosud nenaučil téměř nic, doučováním výrazně zvýší svoji schopnost poznávání nového v matematice.

Horší problémy bývají s žáky, jejichž sebevědomí je výrazně větší než jejich skutečné schopnosti. Mnohdy bývám první, kdo je na jejich povahovou chybu upozorním, neboť tito lidé se často setkávali například v rodině pouze s podporou a výchovou k nadměrnému sebevědomí. To pak vede k tomu, že schopnosti lidí jsou daleko menší, než oni samotní jsou o tom přesvědčeni. Žáci se pak třeba například zbytečně hlásí na školu, kterou nemají sebemenší šanci udělat, nebo si vyberou zaměstnání, které pak nezvládnou vykonávat.

V jiných oblastech života mohou být tyto názory ještě nebezpečnější. Uvedu jen jeden příklad: přecenění svých schopností za volantem auta.

Při doučování se snažím lidem s nadměrným sebevědomím „otevřít oči“. Pokud se mi podaří je přimět k tomu, aby přede mnou počítali sami, vidí, co by sami měli znát a co skutečně znají. Pokud počítám já, upozorňuji na to, že díváním na druhého se nenaučí téměř nic, ale že ctím heslo: „Náš zákazník náš pán.“ Pokud někdo prohlásí, že látku zná a nepotřebuje ji více učit, ptám se, zda si je tím jistý. Nejlépe by se tím přesvědčil, kdybychom si oba dva příklad spočetli na čas. Jsem oproti žákovi starý a tudíž pomaleji myslím, pokud spočte příklad rychleji než já, pak jej umí. Bohužel obecně se v současné době všude věnuje pozornost těm, co zvýšit sebevědomí potřebují a zapomíná se na nebezpečnost opačného extrému.

Zatajované postupy.

Při doučování se mohou žáci naučit i některé jiné postupy, které bývají mnohdy snazší a výhodnější než postupy upřednostňované ve škole a v učebnicích. Nejsou vhodné učit je žáky jen tehdy, když učitelé ve škole nekompromisně trvají na svém postupu nebo když je žáci považují za další zbytečné zatížení.

Řešení kvadratických rovnic:

Obvykle se vyučuje kořeny kvadratické rovnice počítat dvěma vzorci. Nejprve spočítat diskriminant podle vzorce

$$\mathbf{D = b^2 - 4ac}$$

a pak počítat kořeny podle vzorce

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Používat tento postup, který se vyučuje na všech školách a je ve všech učebnicích, má snad jedině tyto důvody:

- 1) počítání diskriminantu zvlášť snad naučí žáky nezapomenout, že nějaký diskriminant existuje.
- 2) Snad se sníží pravděpodobnost, že žáci chybně odmocní záporné číslo
- 3) Méně zdatní počtáři snad lépe zvládnou počítat dva jednodušší vzorce než jeden složitý.

Jinak vše mluví pro to používat vzorec jeden.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 1) Upravování jednoho výrazu je kratší než úprava dvou výrazů. Mezi jednotlivé výrazy se píše rovnítko, postupuje se zleva doprava, na konci řádku se přechází na další řádek).
- 2) Někdy se může využít částečné odmocnění na krácení zlomku.

Př.: $x^2 + 2x - 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot (1 + 15)}}{2} = \frac{-2 \pm 2 \sqrt{1 + 15}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{16}}{1} =$$

$$= -1 \pm 4 = \begin{cases} \underline{\underline{3}} \\ \underline{\underline{-5}} \end{cases}$$

Př.: $x^2 - 18x - 495 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-495)}}{2 \cdot 1} = \frac{18 \pm 2 \cdot \sqrt{9^2 + 495}}{2} = 9 \pm 3 \cdot \sqrt{3^2 + 55} = 9 \pm 3 \cdot \sqrt{64} = 9 \pm 3 \cdot \sqrt{64} =$$

$$= 9 \pm 3 \cdot 8 = 9 \pm 24 = \begin{cases} \underline{\underline{33}} \\ \underline{\underline{-15}} \end{cases}$$

- 3) Někdy je možné použít vzorec $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$

Př.: $6x^2 - 37x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 2^2 \cdot 6^2}}{12} = \frac{37 \pm \sqrt{(37-12) \cdot (37+12)}}{12} = \frac{37 \pm \sqrt{25 \cdot 49}}{12} =$$
$$= \frac{37 \pm 5 \cdot 7}{12} = \frac{37 \pm 35}{12} = \begin{cases} = \frac{72}{12} = \underline{6} \\ = \frac{2}{12} = \underline{\frac{1}{6}} \end{cases}$$

Zejména pro gymnazisty a pro studenty vysokých škol je výhodné co nejdříve přejít na počítání kvadratických rovnic pomocí jednoho vzorce, protože u těchto studentů je předpoklad, že během studia spočtou velké množství kvadratických rovnic. Proto se vyplatí je počítat výhodně a elegantně.

Sčítání a odčítání zlomků.

Doporučuji se naučit sčítání tímto postupem:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{11} =$$

Společný jmenovatel těchto zlomků, tedy nejmenší společný násobek jmenovatelů je $7 \cdot 11 = 77$

$$= \frac{2 \cdot 11}{7 \cdot 11} + \frac{3 \cdot 7}{11 \cdot 7} =$$

První zlomek se rozšířil číslem 11 tak, aby ve jmenovateli bylo číslo $7 \cdot 11 = 77$

Rozšiřování zlomku znamená násobit čitatele i jmenovatele stejným číslem, tedy v tomto případě číslem jedenáct. Při rozšiřování zlomu se jeho hodnota nezmění.

Podobně druhý zlomek se rozšířil číslem 7 tak, aby ve jmenovateli bylo číslo $7 \cdot 11 = 77$

$$= \frac{22}{77} + \frac{21}{77} = \frac{43}{77}$$

Jmenovatel zlomku určuje velikost části celku. Číselník určuje počet těchto částí. Mají-li tedy dva zlomky stejný jmenovatel, jedná se tedy o stejné části celku. Máme-li zlomky sečíst, sečteme jejich čitatele – získáme celkový počet částí, jejichž jméno je vyjádřeno jmenovatelem.

Tento postup jasně zdůvodňuje podle dříve naučených pravidel, proč je součet vypočten správně.

Pokud se postup

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{11} = \frac{2 \cdot 11}{7 \cdot 11} + \frac{3 \cdot 7}{11 \cdot 7} = \frac{22}{77} + \frac{21}{77} = \frac{43}{77}$$

nahradí postupem

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{11} = \frac{2 \cdot 11 + 3 \cdot 7}{7 \cdot 11} = \frac{22 + 21}{77} = \frac{43}{77}$$

napišeme se sice o tři čísla méně, ale postup se nedá zdůvodnit podle dříve naučených pravidel (rozšiřování zlomků). Zpravidla se pouze učí nazpaměť postup způsobem: „Tohle násobím tímhle a píšu to semhle.“

Kratší postup proto doporučuji učit až tehdy, když žák pochopí důvody prvního postupu. Jinak už se je nedozví nikdy.

Grafy goniometrických funkcí

Určení hodnot goniometrických funkcí násobků 30° a 45° bez kalkulačky a tabulek je možné z jednotkové kružnice nebo z grafu. Ve školách se zpravidla vyučuje odečítání hodnot z jednotkové kružnice, přesto mám zkušenost, že pro většinu žáků je jednodušší, přehlednější a názornější odečítání hodnot z grafu. Jednotková kružnice goniometrické funkce definuje a graf je z ní odvozen. Jednotková kružnice tedy je základní znalostí v goniometrických funkcích, ovšem praktické vyhledávání hodnot je z grafu je výhodnější. Podle zkušeností z výuky to přisuzuji těmto důvodům:

- 1) Žáci si snadněji představí velikosti úhlu vynášenou na lineární osu než skutečný úhel. Zkušenost s měřením, porovnání velikostí a odhadu hodnoty je větší s délkami než s úhly.
- 2) Úhly zvětšené o periodu ($360^\circ = 2\pi$) v jednotkové kružnici se znázorňují přes sebe, na grafu se různé hodnoty úhlů na vodorovné ose nikdy nepřekrývají.
- 3) Čtení souřadnice y je jednodušší na grafu než odečítání velikosti souřadnice průsečíku ramene úhlu s jednotkovou kružnicí.
- 4) Způsob odečítání funkcí $\operatorname{tg} \alpha$ a $\operatorname{cotg} \alpha$ z jednotkové kružnice se hůře zapamatovává než zapamatování grafu.

Čas potřebný na přípravu ke zkoušce

Setkal jsem se často s přístupem žáků nebo jejich rodičů, že chtějí předem stanovit kolik času je potřeba k přípravě na zkoušku, kdy budou umět látku natolik, že zkoušku udělají. Zpravidla si tito lidé neuvědomují, že každý žák má jiné základy a jinak rychle se učí. Po ověření se dá zhruba čas odhadnout, přesto nikdy znalosti nejsou stoprocentní. Učit se dá stále, a pořád je něco, co se nezná. Čím více člověk toho zná, tím více si to uvědomuje. Potvrzuje to věta řeckého filozofa Diogena: „Čím více toho vím, tím více vím, že nic nevím.“

Rozsah současných znalostí matematiky je takový, že dávno není ve schopnostech jedince za celý život vše poznat. Našel se však člověk, který za mnou přišel v předvečer přijímacích zkoušek na střední školu se slovy: „Naučte mě matematiku.“

Školní úlohy – počítání do pěti.

Je dobré si uvědomit, že příklady ve škole bývají zpravidla podstatně jednodušší než příklady v praxi. Čitatele a jmenovatele zlomků, koeficienty výrazů rovnic, funkcí, integrálů a podobně tvoří ve školních úlohách zpravidla čísla menší než 20, nejčastěji však čísla menší než 10. Výsledky vychází často celočíselné, výrazy se zpravidla dají zjednodušit. Jedná se však o vyjímečné speciální případy, kde výsledek a postup vychází „hezky“. Skutečné úlohy z praxe nejsou tak snadné jako příklady ve školních učebnicích a sbírkách. Proto je obtížné při doučování příklady vymýšlet, při výuce je vhodnější používat sbírku příkladů. Náhodně vymyšlené příklady se zpravidla „netrefí“ do vyjímečně snadných úloh a pak příklady řešit nejdou nebo velmi obtížně. Rovnice v úlohách v praxi mnohdy nejdou řešit jinak než numerickými metodami, kdy se k výsledné hodnotě pouze s určitou přesností přiblížíme.

Př.: Rovnice $x^2 - 5x + c = 0$ má celočíselné řešení pro kladný celočíselný parametr c pouze tehdy, je-li parametr c roven číslu 4 nebo 6. Z nekonečného počtu přirozených čísel tedy pouze dvě čísla c vyhovují pro celočíselné řešení rovnice.